УДК 519.63

А.Ю. БАЧУРИНА, А.В. БЕЛКО, А.В. НИКИТИН

РАСЧЕТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Предложен численный метод расчета эффективного коэффициента теплопроводности композиционной системы. При построении разностного аналога для дифференциальных операторов, входящих в уравнение теплопроводности, использован интегро-интерполяционный метод. Решение конечно-разностного уравнения теплопроводности выполнено методом прогонки. Разработан параллельный алгоритм для проведения вычислений с использованием многопроцессорных вычислительных систем.

Введение

В данной работе предложен численный метод нахождения эффективного коэффициента теплопроводности композиционной системы. В процессе вычислений необходимо решать трехмерное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами. Точность решения поставленной задачи существенным образом зависит от числа узлов сетки, на которую разбивается расчетная область. Однако увеличение числа узлов сетки значительно увеличивает время расчета. Использование многопроцессорных вычислительных систем позволяет уменьшить время расчета. При этом возникает задача распараллеливания исходного алгоритма. В данной работе рассматриваются методы распараллеливания неявных схем суммарной аппроксимации, используемых для решения уравнения теплопроводности.

Численный метод

Суть предложенного метода состоит в том, что генерируется определенным образом бинарная композиционная система. Композит, теплопроводность которого нужно рассчитать, моделируется в виде куба, разбитого на ячейки. Каждая ячейка может быть заполнена либо материалом матрицы, либо материалом наполнителя. На противоположных боковых гранях этого куба задаются различные температуры. В результате вдоль одного из направлений создается температурный градиент. Остальные грани куба являются адиабатическими. Далее необходимо решать уравнение теплопроводности для полученной системы, чтобы найти температурное поле и общий тепловой поток. Эффективный коэффициент теплопроводности определяется по формуле

$$\lambda = \frac{qL}{T_2 - T_1},$$

где λ – эффективный коэффициент теплопроводности, L – длина ячейки куба, вдоль которой создан градиент температуры, $T_2 - T_1$ – разность температур противоположных граней.

Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет следующий вид:

$$c(p)\rho(p)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla[\lambda(p)\nabla T],\ \tau > 0,\ p \in \Omega, \tag{1}$$

где $p = \{x_1, x_2, x_3\}$ обозначает координаты декартовой системы координат, $c(p)$ – теплоемкость в данной точке пространства, $\rho(p)$ – плотность в данной точке пространства, T – температура, τ – время, $\lambda(p)$ – коэффициент теплопроводности в данной точке пространства, $\Omega = \Omega(x_1, x_2, x_3)$ – конечная пространственная область, ∇ – оператор Гамильтона.

Для корректной постановки задачи уравнение (1) необходимо дополнить начальным и граничными условиями. В качестве начального возьмем однородное распределение температуры в объеме:

$$T(p,0) = T_0 = const > 0. \tag{2}$$

Будем рассматривать граничные условия первого рода:

$$T_S = T_1 = const > 0, \tag{3}$$

где $S = S(x_1, x_2, x_3)$ – поверхность тела.

Конечно-разностные схемы

Будем решать краевую задачу (1–3) методом конечных разностей [1; 2; 3]. Суть данного метода состоит в следующем. Заменим область непрерывного изменения аргументов Ω искомой функции T некоторым конечным множеством точек, лежащих в этой области. Это множество назовем разностной сеткой, сами точки – узлами сетки, а функции, определенные тем или иным способом на этой сетке, – сеточными функциями. Дифференциальный оператор, входящий в уравнение, заменим некоторым разностным оператором, а также сформулируем разностный аналог для краевых условий и начальных данных.

В результате такой замены получим систему алгебраических уравнений, называемых еще разностной схемой. Решая полученную алгебраическую систему, найдем приближенное (разностное) решение в узлах сетки.

При переходе от непрерывной среды к некоторой ее дискретной модели естественно требовать, чтобы для описываемого физического процесса выполнялись законы сохранения. Схемы, для которых данное требование выполняется, называются консервативными. При построении разностного аналога для дифференциальных операторов, входящих в уравнение (1) был использован интегро-интерполяционный метод. Суть метода состоит в следующем. Область изменения независимых переменных разбивается на элементарные ячейки. Затем исходное дифференциальное уравнение интегрируют по ячейке и приходят к интегральным соотношениям. Интегралы и производные, входящие в эти соотношения, заменяются разностными отношениями так, чтобы не нарушались законы сохранения. Для одномерного случая получим следующую разностную аппроксимацию:

$$\frac{u_k^{i+1}-u_k^i}{\eta}=\frac{1}{2c_k\rho_k h}\left[\left(\lambda_{k+1/2}\frac{u_{k+1}^{i+1}-u_k^{i+1}}{h}-\lambda_{k-1/2}\frac{u_k^{i+1}-u_{k-1}^{i+1}}{h}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\lambda_{k+1/2}\frac{u_{k+1}^{i}-u_k^{i}}{h}-\lambda_{k-1/2}\frac{u_k^{i}-u_{k-1}^{i}}{h}\right)\right],$$

где u_k^i – температура в момент времени t в k-м узле сетки, u_k^{i+1} – температура в момент времени $t+\eta$, η – временной шаг, h – шаг сетки (расстояние между соседними узлами сетки), λ_k – теплопроводность в k-м узле сетки. Данная схема называется наилучшей в связи с ее высокой точностью.

Полученная схема содержит в каждом уравнении несколько неизвестных значений функции на новом временном слое; подобные схемы называются неявными. Для получения u_k^{i+1} необходимо решать одновременно всю систему линейных уравнений. Для ее решения используется метод прогонки [4].

Для реализации поставленной задачи в трехмерном случае используются экономичные неявные схемы, основанные на расщеплении пространственного оператора по координатам. Мы использовали локально-одномерные схемы, предложенные А.А.Самарским. Для решения каждого разностного уравнения схемы используется метод прогонки. На промежуточных слоях полученная система разностных уравнений не аппроксимирует исходную задачу. Погрешности аппроксимации промежуточных слоев суммируются и компенсируются так, что на целом слое аппроксимация есть. При этом разностное решение следует сравнивать с точным только на целых слоях. Говорят, что имеет место суммарная аппроксимация.

Распараллеливание задачи

Для распараллеливания исходного алгоритма разбиение области проводилось по одной из трех координат. На новом временном слое каждый процессор последовательно решает три одномерные задачи в своем диапазоне индексов. При этом оказывается, что два этапа алгоритма можно реализовать независимо от данных на других процессорах и использовать для этого алгоритм скалярной прогонки. На третьем этапе схемы данные оказываются распределенными между процессорами [5]. На этом этапе нужно использовать алгоритм параллельной прогонки. Исходный отрезок разбивается на L интервалов распараллеливания. В узлах разбиения искомые неизвестные выбираются в качестве параметрических – (α). Относительно (α) строится вспомогательная система уравнений, после решения которой остальные искомые неизвестные находятся на L интервалах независимо [6].

Распараллеливание производилось с использованием библиотеки MPI в реализации MPICH. Для обмена данных между процессорами использовалась функция MPI_Reduce, позволяющая собирать данные со всех процессоров группы. Для распределения информации по всем процессорам лучше использовать функцию MPI_Broadcast.

Список литературы

1. Беляев, Н.М. Методы теории теплопроводности: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. – М.: Высш. школа, 1982. – Ч. 2. – 304 с.
2. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
3. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин; под ред. А.А. Самарского. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
4. Рихтмайер, Р.Д. Разностные методы решения краевых задач / Р.Д. Рихтмайер; пер. с англ. – М.: Изд. иностранной литературы, 1960. – 262 с.
5. Кудряшова, Т.А. Параллельные алгоритмы решения многомерных краевых задач для параболических уравнений / Т.А. Кудряшова, С.В. Поляков // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сб. – М.: Janus – K, 2003. — С. 212 – 226.
6. Акимова, Е.Н. Распараллеливание алгоритма матричной прогонки / Е.Н. Акимова // Вычислительные алгоритмы и методы. – 1994. – Т. 6, № 9. – С. 61 – 67.

Бачурина Анна Юрьевна, аспирант кафедры теоретической физики физико-технического факультета Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, a.bachurina@grsu.by.

Белко Александр Витальевич, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий физико-технического факультета Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, кандидат физико-математических наук, axela12@list.ru.

Никитин Александр Викторович, заведующий кафедрой теоретической физики физико-технического факультета Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, кандидат технических наук, доцент, nik@grsu.by.